

CUADERNILLO DE REPASO · MATEMÁTICAS

Repaso de Matemáticas



3.º de ESO · Para el verano y los repastos de evaluación

$$x = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}) / (2a)$$

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

$$2^{-3} = 1/8$$

$$(x^3 - 1) : (x - 1) = x^2 + x + 1$$

$$Q_2 = \text{mediana}$$

14 fichas

73 ejercicios

Soluciones paso a paso

Este cuadernillo es de: _____

Curso: _____ Fecha en que lo empiezo: _____

Cómo usar este cuadernillo

Cuadernillo de repaso de Matemáticas de 3.º de ESO · Para el alumnado y las familias

Qué trae

Repasa lo que 3.º de ESO añade a lo anterior: fracciones con corchetes, potencias de exponente negativo y operaciones en notación científica; la división de polinomios y la regla de Ruffini; y una estadística más completa, con desviación típica, cuartiles y datos agrupados en intervalos. Y vuelve, con más dificultad, sobre las operaciones con polinomios, las ecuaciones con denominadores, las de segundo grado y los sistemas. Va en cuatro bloques: «Números y potencias», «Polinomios», «Ecuaciones y sistemas» y «Estadística», con 14 fichas y 73 ejercicios. Dentro de cada bloque, las fichas van de la más sencilla a la más larga.

Las funciones lineales y cuadráticas, la geometría y la probabilidad, que también entran en 3.º, no están: Aulapedia todavía no tiene fichas de esos temas para la ESO.

Cómo usarlo en 3.º de ESO

En 3.º muchos errores vienen de arrastrar mal un signo o un paréntesis, no de desconocer el método. Por eso cada ficha conviene hacerla entera antes de corregir y, al corregir, buscar el primer paso que no coincide con el solucionario. La estadística se presta a usar la calculadora en modo estadístico, pero vale la pena hacer al menos una tabla a mano para entender de dónde sale cada columna. Pensando en 4.º, el bloque de polinomios es el que más rinde.

Cómo corregir

Cada solución recuerda su ejercicio (los problemas largos, por el principio) y lleva los pasos, no solo el resultado. Al corregir, compara paso a paso: si el resultado no coincide, busca el primer paso distinto, que es donde está el error, y rehaz desde ahí. Un error de signo o de unidades no es lo mismo que no saber el método: anótalo al lado para repasarlo.

Para imprimir

Cada ficha empieza en una página nueva, así que puedes imprimir el cuadernillo entero o solo las páginas que necesites: el índice dice dónde empieza cada una y los números coinciden con los del visor de PDF. Está pensado para fotocopiar en blanco y negro.

Puedes imprimirlo y fotocopiarlo para tu clase, tu centro o tu casa. Si quieres compartirlo, comparte el enlace de la página y no el archivo: así llega siempre la versión corregida.



Índice

Cuadernillo de repaso de Matemáticas de 3.º de ESO

	Página	Solución
● Cómo usar este cuadernillo	2	
● Números y potencias	4	
1 Fracciones: operaciones combinadas	4	24
2 Potencias de exponente entero	5	25
3 Operaciones en notación científica	6	27
● Polinomios	7	
4 Polinomios: sumar, restar y multiplicar	7	29
5 Identidades notables	9	30
6 División de polinomios	10	32
7 Regla de Ruffini	12	35
● Ecuaciones y sistemas	13	
8 Ecuaciones con denominadores	13	37
9 Ecuaciones de segundo grado	15	39
10 Sistemas de ecuaciones	16	40
● Estadística	17	
11 Varianza y desviación típica	17	42
12 Media, mediana y moda con tablas	18	43
13 Cuartiles y rango intercuartílico	19	44
14 Tablas de frecuencias con intervalos	21	46
● Solucionario	23	



● Fracciones: operaciones combinadas

1 Calcula respetando la jerarquía de operaciones y simplifica el resultado.

1 $\left(\frac{5}{4}\right)^2 + \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{2}$

2 $\left(\frac{4}{3}\right)^2 + \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4}$

3 $-\frac{3}{10} : \left(\frac{13}{10} - \frac{11}{7}\right) + \frac{4}{3}$

4 $\left(\frac{5}{3} - \frac{1}{3}\right)^2 : \frac{4}{3}$

5 $\left[-\frac{5}{4} - \left(\frac{2}{3} + \left(-\frac{7}{6}\right)\right)\right] \cdot \frac{1}{2}$

6 $\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{3}$



Potencias de exponente entero

1 Simplifica aplicando las propiedades de las potencias.

1 $(-2)^3 \cdot (-2)^2$

2 $3^2 : 3^5$

3 $((2^2)^3)^2 : (2^4)^2$

4 $((2^2)^3)^2 : (2^3)^3$

5 $(7^{-1})^3 \cdot 7^4 : 7^{-2}$

6 $(18^2 \cdot 4^3) : (6^3 \cdot 2^5)$

7 $(12^3 \cdot 9^2) : (6^4 \cdot 2^3)$

8 $(x^2 \cdot y^2)^2 : (x \cdot y^3)^3$



Operaciones en notación científica

1 Opera y da el resultado en notación científica.

1 $(9,8 \cdot 10^{-7}) + (6,5 \cdot 10^{-8})$

2 $(1,4 \cdot 10^1) - (4,6 \cdot 10^{-1})$

3 $(2,4 \cdot 10^{-8}) \cdot (9,9 \cdot 10^5)$

4 $(5,5 \cdot 10^8) + (9,9 \cdot 10^7)$

5 $(6,4 \cdot 10^{-5}) - (9,5 \cdot 10^{-6})$

6 $(3,3 \cdot 10^1) + (2,5 \cdot 10^0)$

7 $(8,7 \cdot 10^{-5}) + (6,4 \cdot 10^{-7})$

8 $(8,7 \cdot 10^3) + (6,2 \cdot 10^1)$



Polinomios: sumar, restar y multiplicar

1 Haz las operaciones con polinomios y simplifica.

1 Resta los polinomios.

$$(2x^3 + x^2 - 5x - 8) - (x^3 - 6x^2 - 1)$$

2 Suma los polinomios.

$$(5x^3 - 2x^2 - 8x - 9) + (6x^2 - 2)$$

3 Suma los polinomios.

$$(8x^3 - 4x^2 + 4x - 1) + (x^3 - 3x^2 - 5x - 6)$$



Polinomios: sumar, restar y multiplicar

- 4 Multiplica los polinomios.

$$(5x + 3) \cdot (5x^2 + x + 4)$$

- 5 Multiplica los polinomios.

$$(2x - 4) \cdot (3x^2 - x + 4)$$

- 6 Multiplica los polinomios.

$$(5x + 5) \cdot (x^2 - 4x - 1)$$



Identidades notables

1 Desarrolla o factoriza, según se pida.

1 Desarrolla.

$$(x + 2y)^2$$

2 Desarrolla.

$$(3x + 3)(3x - 3)$$

3 Desarrolla.

$$(5x + 4)^2$$

4 Desarrolla.

$$(4x + 1)(4x - 1)$$

5 Factoriza.

$$x^2 - 6xy + 9y^2$$

6 Factoriza.

$$4x^2 - 8xy + 4y^2$$

7 Factoriza.

$$3x^2 - 75y^2$$

8 Factoriza.

$$9x^2 - 24x + 16$$



División de polinomios

 Haz la división y escribe el cociente y el resto.

 $(x^4 + 3x^3 - 7x + 6) : (x^2 + 2x - 1)$

 $(2x^4 + 3x^2 + 4x + 1) : (x^2 - x + 3)$



División de polinomios

3 $(2x^4 - 8x^3 + 11x^2 - 4x - 3) : (x^2 - 2x + 3)$

4 $(4x^4 + 5x^3 - 16x^2 + 3x + 4) : (x^2 + 2x - 2)$



Regla de Ruffini

1 Divide por la regla de Ruffini y escribe el cociente y el resto.

1 $(3x^3 + 2x^2 + 4x - 40) : (x - 2)$

Cociente: _____ Resto: _____

2 $(3x^3 + 2x^2 - 4x - 3) : (x - 3)$

Cociente: _____ Resto: _____

3 $(3x^3 - 6x + 3) : (x + 1)$

Cociente: _____ Resto: _____

4 $(2x^3 + 3x^2 + 3x - 6) : (x - 1)$

Cociente: _____ Resto: _____



Ecuaciones con denominadores

1 Quita los denominadores con el m.c.m., resuelve y comprueba la solución.

1 $\frac{2x-5}{6} - \frac{x-5}{6} = \frac{x}{4} + 1$

2 $\frac{2x+1}{6} - \frac{x-5}{3} = \frac{x}{3} + 3$

3 $\frac{2x-3}{3} - \frac{x+1}{6} = \frac{x}{3} - 2$

4 $\frac{3x+2}{4} - \frac{x-5}{5} = \frac{x}{4} + 1$



Ecuaciones con denominadores

$$\textcircled{5} \quad \frac{2x+7}{3} - \frac{x-4}{6} = \frac{x}{4} + 5$$

$$\textcircled{6} \quad \frac{3x+2}{6} - \frac{x+2}{4} = \frac{x}{2} - 1$$

$$\textcircled{7} \quad \frac{3x-4}{5} - \frac{x+3}{6} = \frac{x}{2} - 1$$

$$\textcircled{8} \quad \frac{3x+1}{3} - \frac{x-7}{3} = \frac{x}{3} - 1$$



Ecuaciones de segundo grado

 Resuelve las ecuaciones de segundo grado.

 $3x^2 + 8x = 0$

 $4x^2 + 16 = 0$

 $3x^2 - 12 = 0$

 $2x^2 + 11x + 15 = 0$

 $x^2 + 4x + 4 = 0$

 $2x^2 + 14x + 12 = 0$

 $x(3x - 1) = 0$

 $(2x - 8)(3x + 1) = 0$



Sistemas de ecuaciones

1 Resuelve los sistemas por el método que te parezca más cómodo y comprueba la solución.

1
$$\begin{cases} -5x - 4y = -12 \\ 7x - 4y = -12 \end{cases}$$

2
$$\begin{cases} -6x + 6y = 0 \\ 6x - 4y = -12 \end{cases}$$

3
$$\begin{cases} 2x - 4y = -10 \\ -4x + 6y = 14 \end{cases}$$

4
$$\begin{cases} 5x - 7y = 26 \\ -2x - 7y = 19 \end{cases}$$



Varianza y desviación típica

Básico: datos sueltos · Datos inventados para practicar.

1 Calcula el rango, la media, la varianza y la desviación típica.

Pulsaciones por minuto de 4 deportistas en reposo.

64, 61, 59, 64

2 Calcula el rango, la media, la varianza y la desviación típica.

Minutos que tardan 4 alumnos en llegar al instituto.

13, 8, 8, 7



Media, mediana y moda con tablas

Medio: tablas de frecuencias · Datos inventados para practicar.

1 Calcula la media, la mediana y la moda a partir de la tabla.

Mascotas que hay en casa de 40 alumnos.

xi	fi	Fi
0	5	
1	7	
2	10	
3	9	
4	6	
5	3	

2 Calcula la media, la mediana y la moda a partir de la tabla.

Número de hermanos y hermanas de 20 alumnos de una clase.

xi	fi	Fi
0	4	
1	7	
2	6	
3	3	



Cuartiles y rango intercuartílico

Medio: series más largas de datos sueltos · Datos inventados para practicar.

1 Ordena los datos y calcula Q1, la mediana, Q3 y el rango intercuartílico.

Horas de sueño de 10 jóvenes la noche antes de un examen.

9; 8; 9,5; 5,5; 5,5; 6,5; 6; 7,5; 6,5; 8,5

2 Ordena los datos y calcula Q1, la mediana, Q3 y el rango intercuartílico.

Minutos que tardan 15 alumnos en llegar al instituto.

21, 22, 13, 10, 10, 9, 13, 15, 21, 22, 25, 7, 25, 21, 19



Cuartiles y rango intercuartílico

Medio: series más largas de datos sueltos · Datos inventados para practicar.

Ordena los datos y calcula Q1, la mediana, Q3 y el rango intercuartílico.

Puntos conseguidos por 11 jugadoras de un equipo de baloncesto en un torneo.

6, 15, 8, 10, 9, 8, 10, 8, 10, 7, 8





Tablas de frecuencias con intervalos

Avanzado: datos agrupados en intervalos · Datos inventados para practicar.

- 1

Agrupar los datos en los intervalos de la tabla y complétala (marca de clase, frecuencias y porcentaje).

Litros de agua que consumen al día 20 viviendas de un barrio.

221, 202, 229, 164, 282, 287, 112, 322, 239, 260, 159, 107, 103, 188, 309, 124, 214, 169, 336, 277

Intervalo	ci	fi	Fi	hi	%
[100, 150)					
[150, 200)					
[200, 250)					
[250, 300)					
[300, 350)					
Total					



Tablas de frecuencias con intervalos

Avanzado: datos agrupados en intervalos · Datos inventados para practicar.

- 2

Agrupar los datos en los intervalos de la tabla y complétala (marca de clase, frecuencias y porcentaje).

Tiempo, en minutos, que 25 personas esperan el autobús.

19, 15, 15, 16, 22, 13, 17, 14, 6, 16, 14, 13, 24, 4, 22, 0, 9, 10, 15, 0, 20, 23, 24, 9, 7

Intervalo	ci	fi	Fi	hi	%
[0, 5)					
[5, 10)					
[10, 15)					
[15, 20)					
[20, 25)					
Total					



Solucionario

Cuadernillo de repaso de Matemáticas de 3.º de ESO

Desde aquí hasta el final están las respuestas de todas las fichas, en el mismo orden en que aparecen en el cuadernillo. En el índice, la columna «Solución» dice en qué página está la de cada una.

Si vas a entregar el cuadernillo al alumnado, imprime solo de la página 1 a la 22: estas hojas son para quien corrige.

Cada solución trae los pasos, no solo el resultado. Si se llega al mismo resultado por otro camino correcto, también vale: lo que cuenta es el razonamiento.



Fracciones: operaciones combinadas · Soluciones

① $(\frac{5}{4})^2 + \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{2}$

La potencia: $(\frac{5}{4})^2 = 25/16$.

$$\frac{25}{16} + \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{2}$$

La multiplicación: $\frac{1}{8} \cdot \frac{3}{2} = 3/16$.

$$\frac{25}{16} + \frac{3}{16}$$

La suma: $25/16 + 3/16 = 28/16 = 7/4$.

Solución: $\frac{7}{4}$

② $(\frac{4}{3})^2 + \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4}$

La potencia: $(\frac{4}{3})^2 = 16/9$.

$$\frac{16}{9} + \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4}$$

La multiplicación: $\frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} = 20/12 = 5/3$.

$$\frac{16}{9} + \frac{5}{3}$$

La suma: $16/9 + 5/3 = 16/9 + 15/9 = 31/9$.

Solución: $\frac{31}{9}$

③ $-\frac{3}{10} : (\frac{13}{10} - \frac{11}{7}) + \frac{4}{3}$

Dentro del paréntesis: $\frac{13}{10} - \frac{11}{7} = \frac{91}{70} - \frac{110}{70}$
 $= -19/70$.

$$-\frac{3}{10} : (-\frac{19}{70}) + \frac{4}{3}$$

La división: $-\frac{3}{10} : (-\frac{19}{70}) = -\frac{3}{10} \cdot (-\frac{70}{19})$
 $= 210/190 = 21/19$.

$$\frac{21}{19} + \frac{4}{3}$$

La suma: $\frac{21}{19} + \frac{4}{3} = \frac{63}{57} + \frac{76}{57} = \frac{139}{57}$.

Solución: $\frac{139}{57}$

④ $(\frac{5}{3} - \frac{1}{3})^2 : \frac{4}{3}$

Dentro del paréntesis: $\frac{5}{3} - \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$.

$$(\frac{4}{3})^2 : \frac{4}{3}$$

La potencia: $(\frac{4}{3})^2 = 16/9$.

$$\frac{16}{9} : \frac{4}{3}$$

La división: $16/9 : \frac{4}{3} = 16/9 \cdot \frac{3}{4} = 48/36 = 4/3$.

Solución: $\frac{4}{3}$

⑤ $[-\frac{5}{4} - (\frac{2}{3} + (-\frac{7}{6}))] \cdot \frac{1}{2}$

Dentro del paréntesis: $\frac{2}{3} + (-\frac{7}{6}) = \frac{4}{6} + (-\frac{7}{6})$
 $= -3/6 = -1/2$.

$$[-\frac{5}{4} - (-\frac{1}{2})] \cdot \frac{1}{2}$$

Dentro del corchete: $-\frac{5}{4} - (-\frac{1}{2}) = -\frac{5}{4} - (-\frac{2}{4})$
 $= -3/4$.

$$-\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}$$

La multiplicación: $-\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = -3/8$.

Solución: $-\frac{3}{8}$

⑥ $(\frac{1}{3})^2 + \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{3}$

La potencia: $(\frac{1}{3})^2 = 1/9$.

$$\frac{1}{9} + \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{3}$$

La multiplicación: $\frac{4}{5} \cdot \frac{4}{3} = 16/15$.

$$\frac{1}{9} + \frac{16}{15}$$

La suma: $\frac{1}{9} + \frac{16}{15} = \frac{5}{45} + \frac{48}{45} = \frac{53}{45}$.

Solución: $\frac{53}{45}$



Potencias de exponente entero · Soluciones

① $(-2)^3 \cdot (-2)^2$

Una base negativa con exponente par da positivo; con exponente impar, negativo.

$$(-2)^3 \cdot (-2)^2 = -2^3 \cdot 2^2$$

Producto de potencias de la misma base: se suman los exponentes.

$$-2^3 \cdot 2^2 = -2^{3+2} = -2^5$$

Calculamos el valor.

$$-2^5 = -32$$

Solución: $-2^5 = -32$

② $3^2 : 3^5$

Cociente de potencias de la misma base: se restan los exponentes.

$$3^2 : 3^5 = 3^{2-5} = 3^{-3}$$

Un exponente negativo es el inverso de la potencia con el exponente positivo.

$$3^{-3} = \frac{1}{3^3}$$

Calculamos el valor.

$$\frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$$

Solución: $\frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$

③ $((2^2)^3)^2 : (2^4)^2$

Potencia de una potencia: se multiplican los exponentes.

$$((2^2)^3)^2 : (2^4)^2 = 2^{12} : 2^8$$

Cociente de potencias de la misma base: se restan los exponentes.

$$2^{12} : 2^8 = 2^{12-8} = 2^4$$

Calculamos el valor.

$$2^4 = 16$$

Solución: $2^4 = 16$

④ $((2^2)^3)^2 : (2^3)^3$

Potencia de una potencia: se multiplican los exponentes.

$$((2^2)^3)^2 : (2^3)^3 = 2^{12} : 2^9$$

Cociente de potencias de la misma base: se restan los exponentes.

$$2^{12} : 2^9 = 2^{12-9} = 2^3$$

Calculamos el valor.

$$2^3 = 8$$

Solución: $2^3 = 8$

⑤ $(7^{-1})^3 \cdot 7^4 : 7^{-2}$

Potencia de una potencia: se multiplican los exponentes.

$$(7^{-1})^3 \cdot 7^4 : 7^{-2} = 7^{-3} \cdot 7^4 : 7^{-2}$$

Producto de potencias de la misma base: se suman los exponentes. Cociente de potencias de la misma base: se restan los exponentes.

$$7^{-3} \cdot 7^4 : 7^{-2} = 7^{(-3)+4-(-2)} = 7^3$$

Calculamos el valor.

$$7^3 = 343$$

Solución: $7^3 = 343$

⑥ $(18^2 \cdot 4^3) : (6^3 \cdot 2^5)$

Quitamos los paréntesis.

$$(18^2 \cdot 4^3) : (6^3 \cdot 2^5) = 18^2 \cdot 4^3 : 6^3 : 2^5$$

Descomponemos las bases en factores primos para tener potencias de la misma base ($18 = 2 \cdot 3^2$; $4 = 2^2$; $6 = 2 \cdot 3$) y aplicamos la potencia de una potencia.

$$18^2 \cdot 4^3 : 6^3 : 2^5 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 2^6 : 2^3 : 3^3 : 2^5$$

Producto de potencias de la misma base: se suman los exponentes. Cociente de potencias de la misma base: se restan los exponentes.

$$2^2 \cdot 3^4 \cdot 2^6 : 2^3 : 3^3 : 2^5 = 2^{2+6-3-5} \cdot 3^{4-3} = 2^0 \cdot 3$$



Potencias de exponente entero · Soluciones

Una potencia de exponente 0 vale 1.

$$2^0 \cdot 3 = 3$$

Solución: 3

Un exponente negativo es el inverso de la potencia con el exponente positivo.

$$x \cdot y^{-5} = \frac{x}{y^5}$$

Solución: $\frac{x}{y^5}$

7 $(12^3 \cdot 9^2) : (6^4 \cdot 2^3)$

Quitamos los paréntesis.

$$(12^3 \cdot 9^2) : (6^4 \cdot 2^3) = 12^3 \cdot 9^2 : 6^4 : 2^3$$

Descomponemos las bases en factores primos para tener potencias de la misma base ($12 = 2^2 \cdot 3$; $9 = 3^2$; $6 = 2 \cdot 3$) y aplicamos la potencia de una potencia.

$$12^3 \cdot 9^2 : 6^4 : 2^3 = 2^6 \cdot 3^3 \cdot 3^4 : 2^4 : 3^4 : 2^3$$

Producto de potencias de la misma base: se suman los exponentes. Cociente de potencias de la misma base: se restan los exponentes.

$$2^6 \cdot 3^3 \cdot 3^4 : 2^4 : 3^4 : 2^3 = 2^{6-4-3} \cdot 3^{3+4-4} \\ = 2^{-1} \cdot 3^3$$

Un exponente negativo es el inverso de la potencia con el exponente positivo.

$$2^{-1} \cdot 3^3 = \frac{3^3}{2}$$

Calculamos el valor.

$$\frac{3^3}{2} = \frac{27}{2}$$

Solución: $\frac{3^3}{2} = \frac{27}{2}$

8 $(x^2 \cdot y^2)^2 : (x \cdot y^3)^3$

Potencia de un producto: se eleva cada factor.

Potencia de una potencia: se multiplican los exponentes.

$$(x^2 \cdot y^2)^2 : (x \cdot y^3)^3 = x^4 \cdot y^4 : x^3 : y^9$$

Cociente de potencias de la misma base: se restan los exponentes.

$$x^4 \cdot y^4 : x^3 : y^9 = x^{4-3} \cdot y^{4-9} = x \cdot y^{-5}$$



Operaciones en notación científica · Soluciones

① $(9,8 \cdot 10^{-7}) + (6,5 \cdot 10^{-8})$

Para sumar o restar, las potencias de 10 tienen que ser iguales. Igualamos al exponente mayor (-7):
 $6,5 \cdot 10^{-8} = 0,65 \cdot 10^{-7}$ (movemos la coma 1 lugar a la izquierda).

$$\begin{aligned} &(9,8 \cdot 10^{-7}) + (6,5 \cdot 10^{-8}) \\ &= (9,8 \cdot 10^{-7}) + (0,65 \cdot 10^{-7}) \end{aligned}$$

Con la misma potencia de 10, sumamos las mantisas y dejamos la potencia (sacamos factor común).

$$(9,8 + 0,65) \cdot 10^{-7} = 10,45 \cdot 10^{-7}$$

La mantisa debe estar entre 1 y 10: 10,45
 $= 1,045 \cdot 10^1$, así que sumamos 1 al exponente.
 $10,45 \cdot 10^{-7} = 1,045 \cdot 10^{-6}$

Solución: $(9,8 \cdot 10^{-7}) + (6,5 \cdot 10^{-8})$
 $= 1,045 \cdot 10^{-6}$

② $(1,4 \cdot 10^1) - (4,6 \cdot 10^{-1})$

Para sumar o restar, las potencias de 10 tienen que ser iguales. Igualamos al exponente mayor (1):
 $4,6 \cdot 10^{-1} = 0,046 \cdot 10^1$ (movemos la coma 2 lugares a la izquierda).

$$\begin{aligned} &(1,4 \cdot 10^1) - (4,6 \cdot 10^{-1}) \\ &= (1,4 \cdot 10^1) - (0,046 \cdot 10^1) \end{aligned}$$

Con la misma potencia de 10, restamos las mantisas y dejamos la potencia (sacamos factor común).

$$(1,4 - 0,046) \cdot 10^1 = 1,354 \cdot 10^1$$

Solución: $(1,4 \cdot 10^1) - (4,6 \cdot 10^{-1})$
 $= 1,354 \cdot 10^1$

③ $(2,4 \cdot 10^{-8}) \cdot (9,9 \cdot 10^5)$

Multiplicamos las mantisas entre sí y las potencias de 10 entre sí (se suman los exponentes).

$$\begin{aligned} &(2,4 \cdot 10^{-8}) \cdot (9,9 \cdot 10^5) \\ &= (2,4 \cdot 9,9) \cdot 10^{-8+5} = 23,76 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

La mantisa debe estar entre 1 y 10: 23,76
 $= 2,376 \cdot 10^1$, así que sumamos 1 al exponente.
 $23,76 \cdot 10^{-3} = 2,376 \cdot 10^{-2}$

Solución: $(2,4 \cdot 10^{-8}) \cdot (9,9 \cdot 10^5)$
 $= 2,376 \cdot 10^{-2}$

④ $(5,5 \cdot 10^8) + (9,9 \cdot 10^7)$

Para sumar o restar, las potencias de 10 tienen que ser iguales. Igualamos al exponente mayor (8):
 $9,9 \cdot 10^7 = 0,99 \cdot 10^8$ (movemos la coma 1 lugar a la izquierda).

$$\begin{aligned} &(5,5 \cdot 10^8) + (9,9 \cdot 10^7) \\ &= (5,5 \cdot 10^8) + (0,99 \cdot 10^8) \end{aligned}$$

Con la misma potencia de 10, sumamos las mantisas y dejamos la potencia (sacamos factor común).

$$(5,5 + 0,99) \cdot 10^8 = 6,49 \cdot 10^8$$

Solución: $(5,5 \cdot 10^8) + (9,9 \cdot 10^7) = 6,49 \cdot 10^8$

⑤ $(6,4 \cdot 10^{-5}) - (9,5 \cdot 10^{-6})$

Para sumar o restar, las potencias de 10 tienen que ser iguales. Igualamos al exponente mayor (-5):
 $9,5 \cdot 10^{-6} = 0,95 \cdot 10^{-5}$ (movemos la coma 1 lugar a la izquierda).

$$\begin{aligned} &(6,4 \cdot 10^{-5}) - (9,5 \cdot 10^{-6}) \\ &= (6,4 \cdot 10^{-5}) - (0,95 \cdot 10^{-5}) \end{aligned}$$

Con la misma potencia de 10, restamos las mantisas y dejamos la potencia (sacamos factor común).

$$(6,4 - 0,95) \cdot 10^{-5} = 5,45 \cdot 10^{-5}$$

Solución: $(6,4 \cdot 10^{-5}) - (9,5 \cdot 10^{-6})$
 $= 5,45 \cdot 10^{-5}$



Operaciones en notación científica · Soluciones

6 $(3,3 \cdot 10^1) + (2,5 \cdot 10^0)$

Para sumar o restar, las potencias de 10 tienen que ser iguales. Igualamos al exponente mayor (1):

$2,5 \cdot 10^0 = 0,25 \cdot 10^1$ (movemos la coma 1 lugar a la izquierda).

$$(3,3 \cdot 10^1) + (2,5 \cdot 10^0)$$

$$= (3,3 \cdot 10^1) + (0,25 \cdot 10^1)$$

Con la misma potencia de 10, sumamos las mantisas y dejamos la potencia (sacamos factor común).

$$(3,3 + 0,25) \cdot 10^1 = 3,55 \cdot 10^1$$

Solución: $(3,3 \cdot 10^1) + (2,5 \cdot 10^0) = 3,55 \cdot 10^1$

Con la misma potencia de 10, sumamos las mantisas y dejamos la potencia (sacamos factor común).

$$(8,7 + 0,062) \cdot 10^3 = 8,762 \cdot 10^3$$

Solución: $(8,7 \cdot 10^3) + (6,2 \cdot 10^1) = 8,762 \cdot 10^3$

7 $(8,7 \cdot 10^{-5}) + (6,4 \cdot 10^{-7})$

Para sumar o restar, las potencias de 10 tienen que ser iguales. Igualamos al exponente mayor (-5):

$6,4 \cdot 10^{-7} = 0,064 \cdot 10^{-5}$ (movemos la coma 2 lugares a la izquierda).

$$(8,7 \cdot 10^{-5}) + (6,4 \cdot 10^{-7})$$

$$= (8,7 \cdot 10^{-5}) + (0,064 \cdot 10^{-5})$$

Con la misma potencia de 10, sumamos las mantisas y dejamos la potencia (sacamos factor común).

$$(8,7 + 0,064) \cdot 10^{-5} = 8,764 \cdot 10^{-5}$$

Solución: $(8,7 \cdot 10^{-5}) + (6,4 \cdot 10^{-7})$

$$= 8,764 \cdot 10^{-5}$$

8 $(8,7 \cdot 10^3) + (6,2 \cdot 10^1)$

Para sumar o restar, las potencias de 10 tienen que ser iguales. Igualamos al exponente mayor (3):

$6,2 \cdot 10^1 = 0,062 \cdot 10^3$ (movemos la coma 2 lugares a la izquierda).

$$(8,7 \cdot 10^3) + (6,2 \cdot 10^1)$$

$$= (8,7 \cdot 10^3) + (0,062 \cdot 10^3)$$



Polinomios: sumar, restar y multiplicar · Soluciones

① $(2x^3 + x^2 - 5x - 8) - (x^3 - 6x^2 - 1)$

Restar es sumar el opuesto: quitamos el paréntesis cambiando el signo de cada término del segundo polinomio.

$$\begin{aligned}(2x^3 + x^2 - 5x - 8) - (x^3 - 6x^2 - 1) \\ = 2x^3 + x^2 - 5x - 8 - x^3 + 6x^2 + 1\end{aligned}$$

Agrupamos los términos semejantes (los del mismo grado) y sumamos sus coeficientes.

$$\begin{aligned}(2x^3 - x^3) + (x^2 + 6x^2) - 5x + (-8 + 1) \\ = x^3 + 7x^2 - 5x - 7\end{aligned}$$

Solución: $x^3 + 7x^2 - 5x - 7$

② $(5x^3 - 2x^2 - 8x - 9) + (6x^2 - 2)$

Agrupamos los términos semejantes (los del mismo grado) y sumamos sus coeficientes.

$$\begin{aligned}5x^3 + (-2x^2 + 6x^2) - 8x + (-9 - 2) \\ = 5x^3 + 4x^2 - 8x - 11\end{aligned}$$

Solución: $5x^3 + 4x^2 - 8x - 11$

③ $(8x^3 - 4x^2 + 4x - 1) + (x^3 - 3x^2 - 5x - 6)$

Agrupamos los términos semejantes (los del mismo grado) y sumamos sus coeficientes.

$$\begin{aligned}(8x^3 + x^3) + (-4x^2 - 3x^2) + (4x - 5x) + (-1 - 6) \\ = 9x^3 - 7x^2 - x - 7\end{aligned}$$

Solución: $9x^3 - 7x^2 - x - 7$

④ $(5x + 3) \cdot (5x^2 + x + 4)$

Multiplicamos cada término del primer polinomio por todos los términos del segundo (propiedad distributiva): se multiplican los coeficientes y se suman los exponentes.

$$\begin{aligned}5x \cdot (5x^2 + x + 4) &= 25x^3 + 5x^2 + 20x \\ 3 \cdot (5x^2 + x + 4) &= 15x^2 + 3x + 12\end{aligned}$$

Sumamos los productos y agrupamos los términos semejantes.

$$\begin{aligned}25x^3 + 5x^2 + 20x + 15x^2 + 3x + 12 \\ = 25x^3 + 20x^2 + 23x + 12\end{aligned}$$

Solución: $25x^3 + 20x^2 + 23x + 12$

⑤ $(2x - 4) \cdot (3x^2 - x + 4)$

Multiplicamos cada término del primer polinomio por todos los términos del segundo (propiedad distributiva): se multiplican los coeficientes y se suman los exponentes.

$$\begin{aligned}2x \cdot (3x^2 - x + 4) &= 6x^3 - 2x^2 + 8x \\ -4 \cdot (3x^2 - x + 4) &= -12x^2 + 4x - 16\end{aligned}$$

Sumamos los productos y agrupamos los términos semejantes.

$$\begin{aligned}6x^3 - 2x^2 + 8x - 12x^2 + 4x - 16 \\ = 6x^3 - 14x^2 + 12x - 16\end{aligned}$$

Solución: $6x^3 - 14x^2 + 12x - 16$

⑥ $(5x + 5) \cdot (x^2 - 4x - 1)$

Multiplicamos cada término del primer polinomio por todos los términos del segundo (propiedad distributiva): se multiplican los coeficientes y se suman los exponentes.

$$\begin{aligned}5x \cdot (x^2 - 4x - 1) &= 5x^3 - 20x^2 - 5x \\ 5 \cdot (x^2 - 4x - 1) &= 5x^2 - 20x - 5\end{aligned}$$

Sumamos los productos y agrupamos los términos semejantes.

$$\begin{aligned}5x^3 - 20x^2 - 5x + 5x^2 - 20x - 5 \\ = 5x^3 - 15x^2 - 25x - 5\end{aligned}$$

Solución: $5x^3 - 15x^2 - 25x - 5$



Identidades notables · Soluciones

① $(x + 2y)^2$

Es el cuadrado de una suma: el cuadrado del primero, más el doble del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

$$(x + 2y)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 2y + (2y)^2$$

Calculamos cada término: el cuadrado eleva el coeficiente y multiplica los exponentes por 2; el doble producto multiplica 2 por los dos términos.

$$x^2 + 4xy + 4y^2$$

Resultado ordenado:

$$(x + 2y)^2 = x^2 + 4xy + 4y^2$$

Solución: $(x + 2y)^2 = x^2 + 4xy + 4y^2$

② $(3x + 3)(3x - 3)$

Es una suma por diferencia (producto de dos binomios conjugados): es igual al cuadrado del primero menos el cuadrado del segundo.

$$(3x + 3)(3x - 3) = (3x)^2 - 3^2$$

Calculamos los cuadrados: se eleva el coeficiente y se multiplican los exponentes por 2.

$$9x^2 - 9$$

Resultado ordenado:

$$(3x + 3)(3x - 3) = 9x^2 - 9$$

Solución: $(3x + 3)(3x - 3) = 9x^2 - 9$

③ $(5x + 4)^2$

Es el cuadrado de una suma: el cuadrado del primero, más el doble del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

$$(5x + 4)^2 = (5x)^2 + 2 \cdot 5x \cdot 4 + 4^2$$

Calculamos cada término: el cuadrado eleva el coeficiente y multiplica los exponentes por 2; el doble producto multiplica 2 por los dos términos.

$$25x^2 + 40x + 16$$

Resultado ordenado:

$$(5x + 4)^2 = 25x^2 + 40x + 16$$

Solución: $(5x + 4)^2 = 25x^2 + 40x + 16$

④ $(4x + 1)(4x - 1)$

Es una suma por diferencia (producto de dos binomios conjugados): es igual al cuadrado del primero menos el cuadrado del segundo.

$$(4x + 1)(4x - 1) = (4x)^2 - 1^2$$

Calculamos los cuadrados: se eleva el coeficiente y se multiplican los exponentes por 2.

$$16x^2 - 1$$

Resultado ordenado:

$$(4x + 1)(4x - 1) = 16x^2 - 1$$

Solución: $(4x + 1)(4x - 1) = 16x^2 - 1$

⑤ $x^2 - 6xy + 9y^2$

Dos términos son cuadrados (x^2 ; $9y^2 = (3y)^2$) y el otro es su doble producto, con signo $-$.

$$2 \cdot x \cdot 3y = 6xy$$

Es el desarrollo del cuadrado de una diferencia:

$$x^2 - 6xy + 9y^2 = (x - 3y)^2$$

Solución: $x^2 - 6xy + 9y^2 = (x - 3y)^2$

⑥ $4x^2 - 8xy + 4y^2$

Sacamos factor común 4.

$$4x^2 - 8xy + 4y^2 = 4(x^2 - 2xy + y^2)$$

Dos términos son cuadrados (x^2 ; y^2) y el otro es su doble producto, con signo $-$.

$$2 \cdot x \cdot y = 2xy$$

Es el desarrollo del cuadrado de una diferencia:

$$4x^2 - 8xy + 4y^2 = 4(x - y)^2$$

Solución: $4x^2 - 8xy + 4y^2 = 4(x - y)^2$



Identidades notables · Soluciones

7 $3x^2 - 75y^2$

Sacamos factor común 3.

$$3x^2 - 75y^2 = 3(x^2 - 25y^2)$$

Es una resta de dos cuadrados (una diferencia de cuadrados), que se factoriza como una suma por diferencia.

$$x^2 - 25y^2 = x^2 - (5y)^2 = (x + 5y)(x - 5y)$$

Factorización:

$$3x^2 - 75y^2 = 3(x + 5y)(x - 5y)$$

Solución: $3x^2 - 75y^2 = 3(x + 5y)(x - 5y)$

8 $9x^2 - 24x + 16$

Dos términos son cuadrados ($9x^2 = (3x)^2$; $16 = 4^2$) y el otro es su doble producto, con signo -.

$$2 \cdot 3x \cdot 4 = 24x$$

Es el desarrollo del cuadrado de una diferencia:

$$9x^2 - 24x + 16 = (3x - 4)^2$$

Solución: $9x^2 - 24x + 16 = (3x - 4)^2$



División de polinomios · Soluciones

① $(x^4 + 3x^3 - 7x + 6) : (x^2 + 2x - 1)$

Ordenamos el dividendo y el divisor de mayor a menor grado; en el dividendo dejamos un hueco (o escribimos 0) para los términos que faltan.

$$(x^4 + 3x^3 - 7x + 6) : (x^2 + 2x - 1)$$

Dividimos el primer término del dividendo entre el primer término del divisor y obtenemos un término del cociente.

$$x^4 : x^2 = x^2$$

Multiplicamos ese término por el divisor y lo restamos (le cambiamos el signo y sumamos).

$$(x^4 + 3x^3 - 7x + 6) - (x^4 + 2x^3 - x^2) = x^3 + x^2 - 7x + 6$$

Dividimos el primer término del resto entre el primer término del divisor y obtenemos un término del cociente.

$$x^3 : x^2 = x$$

Multiplicamos ese término por el divisor y lo restamos (le cambiamos el signo y sumamos).

$$(x^3 + x^2 - 7x + 6) - (x^3 + 2x^2 - x) = -x^2 - 6x + 6$$

Dividimos el primer término del resto entre el primer término del divisor y obtenemos un término del cociente.

$$-x^2 : x^2 = -1$$

Multiplicamos ese término por el divisor y lo restamos (le cambiamos el signo y sumamos).

$$(-x^2 - 6x + 6) - (-x^2 - 2x + 1) = -4x + 5$$

Paramos porque el resto tiene grado menor que el divisor. Cociente y resto:

$$C(x) = x^2 + x - 1; R(x) = -4x + 5$$

Comprobación: dividendo = divisor · cociente + resto.

$$x^4 + 3x^3 - 7x + 6 = (x^2 + 2x - 1) \cdot (x^2 + x - 1) - 4x + 5$$

Solución: $C(x) = x^2 + x - 1$; $R(x) = -4x + 5$

② $(2x^4 + 3x^2 + 4x + 1) : (x^2 - x + 3)$

Ordenamos el dividendo y el divisor de mayor a menor grado; en el dividendo dejamos un hueco (o escribimos 0) para los términos que faltan.

$$(2x^4 + 3x^2 + 4x + 1) : (x^2 - x + 3)$$

Dividimos el primer término del dividendo entre el primer término del divisor y obtenemos un término del cociente.

$$2x^4 : x^2 = 2x^2$$

Multiplicamos ese término por el divisor y lo restamos (le cambiamos el signo y sumamos).

$$(2x^4 + 3x^2 + 4x + 1) - (2x^4 - 2x^3 + 6x^2) = 2x^3 - 3x^2 + 4x + 1$$

Dividimos el primer término del resto entre el primer término del divisor y obtenemos un término del cociente.

$$2x^3 : x^2 = 2x$$

Multiplicamos ese término por el divisor y lo restamos (le cambiamos el signo y sumamos).

$$(2x^3 - 3x^2 + 4x + 1) - (2x^3 - 2x^2 + 6x) = -x^2 - 2x + 1$$



División de polinomios · Soluciones

Dividimos el primer término del resto entre el primer término del divisor y obtenemos un término del cociente.

$$-x^2 : x^2 = -1$$

Multiplicamos ese término por el divisor y lo restamos (le cambiamos el signo y sumamos).

$$(-x^2 - 2x + 1) - (-x^2 + x - 3) = -3x + 4$$

Paramos porque el resto tiene grado menor que el divisor. Cociente y resto:

$$C(x) = 2x^2 + 2x - 1; R(x) = -3x + 4$$

Comprobación: dividendo = divisor · cociente + resto.

$$2x^4 + 3x^2 + 4x + 1 = (x^2 - x + 3) \cdot (2x^2 + 2x - 1) - 3x + 4$$

Solución: $C(x) = 2x^2 + 2x - 1$; $R(x) = -3x + 4$

③ $(2x^4 - 8x^3 + 11x^2 - 4x - 3) : (x^2 - 2x + 3)$

Ordenamos el dividendo y el divisor de mayor a menor grado.

$$(2x^4 - 8x^3 + 11x^2 - 4x - 3) : (x^2 - 2x + 3)$$

Dividimos el primer término del dividendo entre el primer término del divisor y obtenemos un término del cociente.

$$2x^4 : x^2 = 2x^2$$

Multiplicamos ese término por el divisor y lo restamos (le cambiamos el signo y sumamos).

$$(2x^4 - 8x^3 + 11x^2 - 4x - 3) - (2x^4 - 4x^3 + 6x^2) = -4x^3 + 5x^2 - 4x - 3$$

Dividimos el primer término del resto entre el primer término del divisor y obtenemos un término del cociente.

$$-4x^3 : x^2 = -4x$$

Multiplicamos ese término por el divisor y lo restamos (le cambiamos el signo y sumamos).

$$(-4x^3 + 5x^2 - 4x - 3) - (-4x^3 + 8x^2 - 12x) = -3x^2 + 8x - 3$$

Dividimos el primer término del resto entre el primer término del divisor y obtenemos un término del cociente.

$$-3x^2 : x^2 = -3$$

Multiplicamos ese término por el divisor y lo restamos (le cambiamos el signo y sumamos).

$$(-3x^2 + 8x - 3) - (-3x^2 + 6x - 9) = 2x + 6$$

Paramos porque el resto tiene grado menor que el divisor. Cociente y resto:

$$C(x) = 2x^2 - 4x - 3; R(x) = 2x + 6$$

Comprobación: dividendo = divisor · cociente + resto.

$$2x^4 - 8x^3 + 11x^2 - 4x - 3 = (x^2 - 2x + 3) \cdot (2x^2 - 4x - 3) + 2x + 6$$

Solución: $C(x) = 2x^2 - 4x - 3$; $R(x) = 2x + 6$

④ $(4x^4 + 5x^3 - 16x^2 + 3x + 4) : (x^2 + 2x - 2)$

Ordenamos el dividendo y el divisor de mayor a menor grado.

$$(4x^4 + 5x^3 - 16x^2 + 3x + 4) : (x^2 + 2x - 2)$$



División de polinomios · Soluciones

Dividimos el primer término del dividendo entre el primer término del divisor y obtenemos un término del cociente.

$$4x^4 : x^2 = 4x^2$$

Multiplicamos ese término por el divisor y lo restamos (le cambiamos el signo y sumamos).

$$(4x^4 + 5x^3 - 16x^2 + 3x + 4) - (4x^4 + 8x^3 - 8x^2) = -3x^3 - 8x^2 + 3x + 4$$

Dividimos el primer término del resto entre el primer término del divisor y obtenemos un término del cociente.

$$-3x^3 : x^2 = -3x$$

Multiplicamos ese término por el divisor y lo restamos (le cambiamos el signo y sumamos).

$$(-3x^3 - 8x^2 + 3x + 4) - (-3x^3 - 6x^2 + 6x) = -2x^2 - 3x + 4$$

Dividimos el primer término del resto entre el primer término del divisor y obtenemos un término del cociente.

$$-2x^2 : x^2 = -2$$

Multiplicamos ese término por el divisor y lo restamos (le cambiamos el signo y sumamos).

$$(-2x^2 - 3x + 4) - (-2x^2 - 4x + 4) = x$$

Paramos porque el resto tiene grado menor que el divisor. Cociente y resto:

$$C(x) = 4x^2 - 3x - 2; R(x) = x$$

Comprobación: dividendo = divisor · cociente + resto.

$$4x^4 + 5x^3 - 16x^2 + 3x + 4 = (x^2 + 2x - 2) \cdot (4x^2 - 3x - 2) + x$$

Solución: $C(x) = 4x^2 - 3x - 2$; $R(x) = x$



Regla de Ruffini · Soluciones

① $(3x^3 + 2x^2 + 4x - 40) : (x - 2)$

Escribimos los coeficientes del dividendo de mayor a menor grado.

$$3 \quad 2 \quad 4 \quad -40$$

A la izquierda ponemos el número que anula el divisor: si dividimos entre $x - 2$, ese número es 2.

Bajamos el primer coeficiente: 3.

Multiplicamos $2 \cdot 3$, lo escribimos debajo del siguiente coeficiente y sumamos la columna.

$$2 \cdot 3 = 6; \quad 2 + 6 = 8$$

$$2 \cdot 8 = 16; \quad 4 + 16 = 20$$

Última columna (es el resto):

$$2 \cdot 20 = 40; \quad -40 + 40 = 0$$

Tabla completa:

	3	2	4	-40
2		6	16	40
	3	8	20	0

El último número es el resto. Los demás son los coeficientes del cociente, que tiene un grado menos que el dividendo.

$$C(x) = 3x^2 + 8x + 20; \quad R = 0$$

Comprobación con el teorema del resto: el resto de dividir entre $x - 2$ es el valor del polinomio en $x = 2$.

$$\begin{aligned} P(2) &= 3 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 - 40 \\ &= 24 + 8 + 8 - 40 = 0 \end{aligned}$$

Solución: $C(x) = 3x^2 + 8x + 20; \quad R = 0$

② $(3x^3 + 2x^2 - 4x - 3) : (x - 3)$

Escribimos los coeficientes del dividendo de mayor a menor grado.

$$3 \quad 2 \quad -4 \quad -3$$

A la izquierda ponemos el número que anula el divisor: si dividimos entre $x - 3$, ese número es 3.

Bajamos el primer coeficiente: 3.

Multiplicamos $3 \cdot 3$, lo escribimos debajo del siguiente coeficiente y sumamos la columna.

$$3 \cdot 3 = 9; \quad 2 + 9 = 11$$

$$3 \cdot 11 = 33; \quad -4 + 33 = 29$$

Última columna (es el resto):

$$3 \cdot 29 = 87; \quad -3 + 87 = 84$$

Tabla completa:

	3	2	-4	-3
3		9	33	87
	3	11	29	84

El último número es el resto. Los demás son los coeficientes del cociente, que tiene un grado menos que el dividendo.

$$C(x) = 3x^2 + 11x + 29; \quad R = 84$$

Comprobación con el teorema del resto: el resto de dividir entre $x - 3$ es el valor del polinomio en $x = 3$.

$$\begin{aligned} P(3) &= 3 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 - 4 \cdot 3 - 3 \\ &= 81 + 18 - 12 - 3 = 84 \end{aligned}$$

Solución: $C(x) = 3x^2 + 11x + 29; \quad R = 84$

③ $(3x^3 - 6x + 3) : (x + 1)$

Escribimos los coeficientes del dividendo de mayor a menor grado, con un 0 en el lugar de cada término que falta.

$$3 \quad 0 \quad -6 \quad 3$$

A la izquierda ponemos el número que anula el divisor: si dividimos entre $x + 1$, ese número es -1.

Bajamos el primer coeficiente: 3.

Multiplicamos $-1 \cdot 3$, lo escribimos debajo del siguiente coeficiente y sumamos la columna.

$$-1 \cdot 3 = -3; \quad 0 + (-3) = -3$$

$$-1 \cdot (-3) = 3; \quad -6 + 3 = -3$$

Última columna (es el resto):

$$-1 \cdot (-3) = 3; \quad 3 + 3 = 6$$



Regla de Ruffini · Soluciones

Tabla completa:

	3	0	-6	3
-1		-3	3	3
	3	-3	-3	6

El último número es el resto. Los demás son los coeficientes del cociente, que tiene un grado menos que el dividendo.

$$C(x) = 3x^2 - 3x - 3; \quad R = 6$$

Comprobación con el teorema del resto: el resto de dividir entre $x + 1$ es el valor del polinomio en $x = -1$.

$$P(-1) = 3 \cdot (-1)^3 - 6 \cdot (-1) + 3 = -3 + 6 + 3 = 6$$

Solución: $C(x) = 3x^2 - 3x - 3; \quad R = 6$

4 $(2x^3 + 3x^2 + 3x - 6) : (x - 1)$

Escribimos los coeficientes del dividendo de mayor a menor grado.

$$2 \quad 3 \quad 3 \quad -6$$

A la izquierda ponemos el número que anula el divisor: si dividimos entre $x - 1$, ese número es 1.

Bajamos el primer coeficiente: 2.

Multiplicamos $1 \cdot 2$, lo escribimos debajo del siguiente coeficiente y sumamos la columna.

$$1 \cdot 2 = 2; \quad 3 + 2 = 5$$

$$1 \cdot 5 = 5; \quad 3 + 5 = 8$$

Última columna (es el resto):

$$1 \cdot 8 = 8; \quad -6 + 8 = 2$$

Tabla completa:

	2	3	3	-6
1		2	5	8
	2	5	8	2

El último número es el resto. Los demás son los coeficientes del cociente, que tiene un grado menos que el dividendo.

$$C(x) = 2x^2 + 5x + 8; \quad R = 2$$

Comprobación con el teorema del resto: el resto de dividir entre $x - 1$ es el valor del polinomio en $x = 1$.

$$P(1) = 2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 6 = 2 + 3 + 3 - 6 = 2$$

Solución: $C(x) = 2x^2 + 5x + 8; \quad R = 2$



Ecuaciones con denominadores · Soluciones

$$\textcircled{1} \quad \frac{2x-5}{6} - \frac{x-5}{6} = \frac{x}{4} + 1$$

m.c.m.(4, 6) = 12. Multiplicamos por 12:

$$2(2x-5) - 2(x-5) = 3x + 12$$

Quitamos los paréntesis:

$$4x - 10 - 2x + 10 = 3x + 12$$

Transponemos:

$$4x - 2x - 3x = 12 + 10 - 10$$

Reducimos:

$$-x = 12$$

Cambiamos de signo:

$$x = -12$$

Solución: $x = -12$

$$\textcircled{2} \quad \frac{2x+1}{6} - \frac{x-5}{3} = \frac{x}{3} + 3$$

m.c.m.(3, 6) = 6. Multiplicamos por 6:

$$2x + 1 - 2(x-5) = 2x + 18$$

Quitamos los paréntesis:

$$2x + 1 - 2x + 10 = 2x + 18$$

Transponemos:

$$2x - 2x - 2x = 18 - 1 - 10$$

Reducimos:

$$-2x = 7$$

Despejamos x:

$$x = \frac{7}{-2} = -\frac{7}{2}$$

Solución: $x = -\frac{7}{2}$

$$\textcircled{3} \quad \frac{2x-3}{3} - \frac{x+1}{6} = \frac{x}{3} - 2$$

m.c.m.(3, 6) = 6. Multiplicamos por 6:

$$2(2x-3) - (x+1) = 2x - 12$$

Quitamos los paréntesis:

$$4x - 6 - x - 1 = 2x - 12$$

Transponemos:

$$4x - x - 2x = -12 + 6 + 1$$

Reducimos:

$$x = -5$$

Solución: $x = -5$

$$\textcircled{4} \quad \frac{3x+2}{4} - \frac{x-5}{5} = \frac{x}{4} + 1$$

m.c.m.(4, 5) = 20. Multiplicamos por 20:

$$5(3x+2) - 4(x-5) = 5x + 20$$

Quitamos los paréntesis:

$$15x + 10 - 4x + 20 = 5x + 20$$

Transponemos:

$$15x - 4x - 5x = 20 - 10 - 20$$

Reducimos:

$$6x = -10$$

Despejamos x:

$$x = \frac{-10}{6} = -\frac{5}{3}$$

Solución: $x = -\frac{5}{3}$

$$\textcircled{5} \quad \frac{2x+7}{3} - \frac{x-4}{6} = \frac{x}{4} + 5$$

m.c.m.(3, 4, 6) = 12. Multiplicamos por 12:

$$4(2x+7) - 2(x-4) = 3x + 60$$

Quitamos los paréntesis:

$$8x + 28 - 2x + 8 = 3x + 60$$

Transponemos:

$$8x - 2x - 3x = 60 - 28 - 8$$

Reducimos:

$$3x = 24$$

Despejamos x:

$$x = \frac{24}{3} = 8$$

Solución: $x = 8$

$$\textcircled{6} \quad \frac{3x+2}{6} - \frac{x+2}{4} = \frac{x}{2} - 1$$

m.c.m.(2, 4, 6) = 12. Multiplicamos por 12:

$$2(3x+2) - 3(x+2) = 6x - 12$$

Quitamos los paréntesis:

$$6x + 4 - 3x - 6 = 6x - 12$$

Transponemos:

$$6x - 3x - 6x = -12 - 4 + 6$$

Reducimos:

$$-3x = -10$$



Ecuaciones con denominadores · Soluciones

Despejamos x:

$$x = \frac{-10}{-3} = \frac{10}{3}$$

Solución: $x = \frac{10}{3}$

7 $\frac{3x-4}{5} - \frac{x+3}{6} = \frac{x}{2} - 1$

m.c.m.(2, 5, 6) = 30. Multiplicamos por 30:

$$6(3x-4) - 5(x+3) = 15x - 30$$

Quitamos los paréntesis:

$$18x - 24 - 5x - 15 = 15x - 30$$

Transponemos:

$$18x - 5x - 15x = -30 + 24 + 15$$

Reducimos:

$$-2x = 9$$

Despejamos x:

$$x = \frac{9}{-2} = -\frac{9}{2}$$

Solución: $x = -\frac{9}{2}$

8 $\frac{3x+1}{3} - \frac{x-7}{3} = \frac{x}{3} - 1$

Multiplicamos por 3:

$$3x + 1 - (x - 7) = x - 3$$

Quitamos los paréntesis:

$$3x + 1 - x + 7 = x - 3$$

Transponemos:

$$3x - x - x = -3 - 1 - 7$$

Reducimos:

$$x = -11$$

Solución: $x = -11$



Ecuaciones de segundo grado · Soluciones

① $3x^2 + 8x = 0$

Incompleta: factor común x .

$$x(3x + 8) = 0$$

$$x = 0 \text{ o } 3x + 8 = 0 \Rightarrow x = -\frac{8}{3}$$

Solución: $x_1 = 0$; $x_2 = -\frac{8}{3}$

② $4x^2 + 16 = 0$

Entre 4:

$$x^2 + 4 = 0$$

Incompleta: despejamos x^2 .

$$x^2 = -4$$

x^2 no puede ser negativo: ningún número real al cuadrado da -4 . No tiene solución real.

Solución: No tiene solución real

③ $3x^2 - 12 = 0$

Entre 3:

$$x^2 - 4 = 0$$

Incompleta: despejamos x^2 .

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

Solución: $x_1 = 2$; $x_2 = -2$

④ $2x^2 + 11x + 15 = 0$

$a = 2$, $b = 11$, $c = 15$.

$$\Delta = 11^2 - 4 \cdot 2 \cdot 15 = 121 - 120 = 1$$

$\Delta > 0$: dos soluciones.

$$x = \frac{-11 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \frac{-11 \pm 1}{4}$$

$$x_1 = \frac{-11 + 1}{4} = \frac{-10}{4} = -\frac{5}{2}$$

$$x_2 = \frac{-11 - 1}{4} = \frac{-12}{4} = -3$$

Solución: $x_1 = -\frac{5}{2}$; $x_2 = -3$

⑤ $x^2 + 4x + 4 = 0$

$a = 1$, $b = 4$, $c = 4$.

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 16 - 16 = 0$$

$\Delta = 0$: solución doble.

$$x = \frac{-4}{2 \cdot 1} = -2$$

Solución: $x = -2$ (doble)

⑥ $2x^2 + 14x + 12 = 0$

Entre 2:

$$x^2 + 7x + 6 = 0$$

$a = 1$, $b = 7$, $c = 6$.

$$\Delta = 7^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 49 - 24 = 25$$

$\Delta > 0$: dos soluciones.

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{-7 \pm 5}{2}$$

$$x_1 = \frac{-7 + 5}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$x_2 = \frac{-7 - 5}{2} = \frac{-12}{2} = -6$$

Solución: $x_1 = -1$; $x_2 = -6$

⑦ $x(3x - 1) = 0$

Cada factor igual a 0:

$$x = 0$$

$$3x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

Solución: $x_1 = 0$; $x_2 = \frac{1}{3}$

⑧ $(2x - 8)(3x + 1) = 0$

Cada factor igual a 0:

$$2x - 8 = 0 \Rightarrow x = 4$$

$$3x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$$

Solución: $x_1 = -\frac{1}{3}$; $x_2 = 4$



Sistemas de ecuaciones · Soluciones

$$\textcircled{1} \begin{cases} -5x - 4y = -12 \\ 7x - 4y = -12 \end{cases}$$

Multiplicamos la segunda por -1 :

$$\begin{cases} -5x - 4y = -12 \\ -7x + 4y = 12 \end{cases}$$

Sumamos:

$$-12x = 0$$

Despejamos x :

$$x = 0$$

En la primera, con $x = 0$:

$$-4y = -12$$

Despejamos y :

$$y = \frac{-12}{-4} = 3$$

Solución: $x = 0$; $y = 3$

$$\textcircled{2} \begin{cases} -6x + 6y = 0 \\ 6x - 4y = -12 \end{cases}$$

Primera ecuación:

Simplificamos entre 6:

$$-x + y = 0$$

Segunda ecuación:

Simplificamos entre 2:

$$3x - 2y = -6$$

El sistema queda así:

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ 3x - 2y = -6 \end{cases}$$

Multiplicamos la primera por 2:

$$\begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ 3x - 2y = -6 \end{cases}$$

Sumamos:

$$x = -6$$

En la primera, con $x = -6$:

$$-(-6) + y = 0$$

Transponemos:

$$y = -6$$

Solución: $x = -6$; $y = -6$

$$\textcircled{3} \begin{cases} 2x - 4y = -10 \\ -4x + 6y = 14 \end{cases}$$

Primera ecuación:

Simplificamos entre 2:

$$x - 2y = -5$$

Segunda ecuación:

Simplificamos entre 2:

$$-2x + 3y = 7$$

El sistema queda así:

$$\begin{cases} x - 2y = -5 \\ -2x + 3y = 7 \end{cases}$$

Multiplicamos la primera por 2:

$$\begin{cases} 2x - 4y = -10 \\ -2x + 3y = 7 \end{cases}$$

Sumamos:

$$-y = -3$$

Cambiamos de signo:

$$y = 3$$

En la primera, con $y = 3$:

$$x - 2 \cdot 3 = -5$$

Transponemos:

$$x = -5 + 6$$

Reducimos:

$$x = 1$$

Solución: $x = 1$; $y = 3$

$$\textcircled{4} \begin{cases} 5x - 7y = 26 \\ -2x - 7y = 19 \end{cases}$$

Multiplicamos la segunda por -1 :

$$\begin{cases} 5x - 7y = 26 \\ 2x + 7y = -19 \end{cases}$$

Sumamos:

$$7x = 7$$

Despejamos x :

$$x = \frac{7}{7} = 1$$

En la primera, con $x = 1$:

$$5 \cdot 1 - 7y = 26$$



Sistemas de ecuaciones · Soluciones

Transponemos:

$$-7y = 26 - 5$$

Reducimos:

$$-7y = 21$$

Despejamos y:

$$y = \frac{21}{-7} = -3$$

Solución: $x = 1$; $y = -3$



● Varianza y desviación típica · Soluciones

Básico: datos sueltos · Datos inventados para practicar.

1 ● Calcula el rango, la media, la varianza y la desviación típica.

Pulsaciones por minuto de 4 deportistas en reposo.

64, 61, 59, 64

Rango (recorrido) = dato mayor – dato menor = $64 - 59 = 5$.

Media: $\bar{x} = 248/4 = 62$ (suma de los datos entre n).

Distancias a la media ($x_i - \bar{x}$): -3, -1, 2, 2.

Cuadrados de las distancias: $9 + 1 + 4 + 4 = 18$.

Varianza: $\sigma^2 = \sum (x_i - \bar{x})^2 / n = 18/4 = 4,5$.

Con la fórmula abreviada, $\sigma^2 = \sum x_i^2 / n - \bar{x}^2$, sale lo mismo: $15\ 394/4 - 62^2 = 3848,5 - 3844 = 4,5$. Con media decimal o muchos datos, esa es la más cómoda.

Desviación típica: $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{4,5} \approx 2,12$.

Solución: Rango = 5; $\bar{x} = 62$; $\sigma^2 = 4,5$; $\sigma \approx 2,12$

2 ● Calcula el rango, la media, la varianza y la desviación típica.

Minutos que tardan 4 alumnos en llegar al instituto.

13, 8, 8, 7

Rango (recorrido) = dato mayor – dato menor = $13 - 7 = 6$.

Media: $\bar{x} = 36/4 = 9$ (suma de los datos entre n).

Distancias a la media ($x_i - \bar{x}$): -2, -1, -1, 4.

Cuadrados de las distancias: $4 + 1 + 1 + 16 = 22$.

Varianza: $\sigma^2 = \sum (x_i - \bar{x})^2 / n = 22/4 = 5,5$.

Con la fórmula abreviada, $\sigma^2 = \sum x_i^2 / n - \bar{x}^2$, sale lo mismo: $346/4 - 9^2 = 86,5 - 81 = 5,5$. Con media decimal o muchos datos, esa es la más cómoda.

Desviación típica: $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{5,5} \approx 2,35$.

Solución: Rango = 6; $\bar{x} = 9$; $\sigma^2 = 5,5$; $\sigma \approx 2,35$



Media, mediana y moda con tablas · Soluciones

Medio: tablas de frecuencias · Datos inventados para practicar.

1 Calcula la media, la mediana y la moda a partir de la tabla.

Mascotas que hay en casa de 40 alumnos.

xi	fi	Fi
0	5	5
1	7	12
2	10	22
3	9	31
4	6	37
5	3	40

Multiplica cada valor por su frecuencia y suma: $\sum xi \cdot fi = 0 \cdot 5 + 1 \cdot 7 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 9 + 4 \cdot 6 + 5 \cdot 3 = 93$.

Media: $\bar{x} = \sum xi \cdot fi / n = 93/40 = 2,325$.

Busca $n/2$ en la columna de las frecuencias acumuladas Fi.

$n/2 = 20$: la primera Fi que lo supera es 22, la de $xi = 2$: $Me = 2$.

El valor que más se repite es 2 (10 veces): $Mo = 2$.

Solución: $\bar{x} = 2,325$; $Me = 2$; $Mo = 2$

2 Calcula la media, la mediana y la moda a partir de la tabla.

Número de hermanos y hermanas de 20 alumnos de una clase.

xi	fi	Fi
0	4	4
1	7	11
2	6	17
3	3	20

Multiplica cada valor por su frecuencia y suma: $\sum xi \cdot fi = 0 \cdot 4 + 1 \cdot 7 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 3 = 28$.

Media: $\bar{x} = \sum xi \cdot fi / n = 28/20 = 1,4$.

Busca $n/2$ en la columna de las frecuencias acumuladas Fi.

$n/2 = 10$: la primera Fi que lo supera es 11, la de $xi = 1$: $Me = 1$.

El valor que más se repite es 1 (7 veces): $Mo = 1$.

Solución: $\bar{x} = 1,4$; $Me = 1$; $Mo = 1$



Cuartiles y rango intercuartílico • Soluciones

Medio: series más largas de datos sueltos • Datos inventados para practicar.

1 Ordena los datos y calcula Q1, la mediana, Q3 y el rango intercuartílico.

Horas de sueño de 10 jóvenes la noche antes de un examen.

9; 8; 9,5; 5,5; 5,5; 6,5; 6; 7,5; 6,5; 8,5

Datos ordenados: 5,5; 5,5; 6; 6,5; 6,5; 7,5; 8; 8,5; 9; 9,5 ($n = 10$).

$n/4 = 2,5$ no es entero: Q1 es el dato del lugar siguiente, el 3.º de 10: $Q1 = 6$.

$2n/4 = 5$ es entero: $Q2 = Me$ es la media de los datos 5.º y 6.º: $(6,5 + 7,5)/2 = 7$.

$3n/4 = 7,5$ no es entero: Q3 es el dato del lugar siguiente, el 8.º de 10: $Q3 = 8,5$.

Rango intercuartílico: $RIC = Q3 - Q1 = 8,5 - 6 = 2,5$. Entre Q1 y Q3 está la mitad central de los datos.

Solución: $Q1 = 6$; $Me = 7$; $Q3 = 8,5$; $RIC = 2,5$

2 Ordena los datos y calcula Q1, la mediana, Q3 y el rango intercuartílico.

Minutos que tardan 15 alumnos en llegar al instituto.

21, 22, 13, 10, 10, 9, 13, 15, 21, 22, 25, 7, 25, 21, 19

Datos ordenados: 7, 9, 10, 10, 13, 13, 15, 19, 21, 21, 21, 22, 22, 25, 25 ($n = 15$).

$n/4 = 3,75$ no es entero: Q1 es el dato del lugar siguiente, el 4.º de 15: $Q1 = 10$.

$2n/4 = 7,5$ no es entero: Q2 = Me es el dato del lugar siguiente, el 8.º de 15: $Q2 = Me = 19$.

$3n/4 = 11,25$ no es entero: Q3 es el dato del lugar siguiente, el 12.º de 15: $Q3 = 22$.

Rango intercuartílico: $RIC = Q3 - Q1 = 22 - 10 = 12$. Entre Q1 y Q3 está la mitad central de los datos.

Solución: $Q1 = 10$; $Me = 19$; $Q3 = 22$; $RIC = 12$



Cuartiles y rango intercuartílico · Soluciones

Medio: series más largas de datos sueltos · Datos inventados para practicar.

3 Ordena los datos y calcula Q1, la mediana, Q3 y el rango intercuartílico.

Puntos conseguidos por 11 jugadoras de un equipo de baloncesto en un torneo.

6, 15, 8, 10, 9, 8, 10, 8, 10, 7, 8

Datos ordenados: 6, 7, 8, 8, 8, 8, 9, 10, 10, 10, 15 ($n = 11$).

$n/4 = 2,75$ no es entero: Q1 es el dato del lugar siguiente, el 3.º de 11: $Q1 = 8$.

$2n/4 = 5,5$ no es entero: Q2 = Me es el dato del lugar siguiente, el 6.º de 11: $Q2 = Me = 8$.

$3n/4 = 8,25$ no es entero: Q3 es el dato del lugar siguiente, el 9.º de 11: $Q3 = 10$.

Rango intercuartílico: $RIC = Q3 - Q1 = 10 - 8 = 2$. Entre Q1 y Q3 está la mitad central de los datos.

Solución: $Q1 = 8$; $Me = 8$; $Q3 = 10$; $RIC = 2$



Tablas de frecuencias con intervalos · Soluciones

Avanzado: datos agrupados en intervalos · Datos inventados para practicar.

- 1 Agrupa los datos en los intervalos de la tabla y complétala (marca de clase, frecuencias y porcentaje).

Litros de agua que consumen al día 20 viviendas de un barrio.

221, 202, 229, 164, 282, 287, 112, 322, 239, 260, 159, 107, 103, 188, 309, 124, 214, 169, 336, 277

Intervalo	ci	fi	Fi	hi	%
[100, 150)	125	4	4	0,2	20 %
[150, 200)	175	4	8	0,2	20 %
[200, 250)	225	5	13	0,25	25 %
[250, 300)	275	4	17	0,2	20 %
[300, 350)	325	3	20	0,15	15 %
Total		20		1	100 %

Marca de clase de cada intervalo: el punto medio, $ci = (Li + Ls)/2$. Por ejemplo, $(100 + 150)/2 = 125$.

Número total de datos: $n = \text{suma de las } fi = 4 + 4 + 5 + 4 + 3 = 20$.

Frecuencia absoluta acumulada Fi : suma las fi hasta esa fila (4 ; $4 + 4 = 8$; $8 + 5 = 13$; $13 + 4 = 17 \dots$). La última es $n = 20$.

Frecuencia relativa $hi = fi/n$: $4/20 = 0,2$. Las hi suman 1.

Relativa acumulada $Hi = Fi/n$, y el porcentaje es $hi \cdot 100$ ($0,2 \cdot 100 = 20 \%$).



Tablas de frecuencias con intervalos · Soluciones

Avanzado: datos agrupados en intervalos · Datos inventados para practicar.

2 Agrupa los datos en los intervalos de la tabla y complétala (marca de clase, frecuencias y porcentaje).

Tiempo, en minutos, que 25 personas esperan el autobús.

19, 15, 15, 16, 22, 13, 17, 14, 6, 16, 14, 13, 24, 4, 22, 0, 9, 10, 15, 0, 20, 23, 24, 9, 7

Intervalo	ci	fi	Fi	hi	%
[0, 5)	2,5	3	3	0,12	12 %
[5, 10)	7,5	4	7	0,16	16 %
[10, 15)	12,5	5	12	0,2	20 %
[15, 20)	17,5	7	19	0,28	28 %
[20, 25)	22,5	6	25	0,24	24 %
Total		25		1	100 %

Marca de clase de cada intervalo: el punto medio, $ci = (Li + Ls)/2$. Por ejemplo, $(0 + 5)/2 = 2,5$.

Número total de datos: $n = \text{suma de las } fi = 3 + 4 + 5 + 7 + 6 = 25$.

Frecuencia absoluta acumulada Fi : suma las fi hasta esa fila (3 ; $3 + 4 = 7$; $7 + 5 = 12$; $12 + 7 = 19$...). La última es $n = 25$.

Frecuencia relativa $hi = fi/n$: $3/25 = 0,12$. Las hi suman 1.

Relativa acumulada $Hi = Fi/n$, y el porcentaje es $hi \cdot 100$ ($0,12 \cdot 100 = 12 \%$).

